

新定义

一、解答题

1. 若数列 $\{A_n\}$ 满足 $\frac{1}{2} \leq \frac{A_{n+1}}{A_n} \leq 2 (n \in \mathbf{N}^*)$, 则称 $\{A_n\}$ 是“紧密数列”. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $S_n = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

(1) 试判断 $\{a_n\}$ 是否为“紧密数列”, 并说明理由.

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 是“紧密数列”, 已知 $b_n = c^n \cdot a_n$ (c 为常数), 且 $4b_3 = 9b_2 - 2b_1$, 求 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

【答案】(1) 是“紧密数列”, 理由见解析

(2) $2^n - 1$

【分析】(1) 由 $a_n = S_n - S_{n-1}$ 得到通项公式, 根据“紧密数列”定义可得到结果;

(2) 根据第一问结果, 可得到数列 $\{b_n\}$ 的通项公式, 根据它是“紧密数列”以及 $4b_3 = 9b_2 - 2b_1$, 可得到 $\frac{c}{3} = 1$, 进而得到 $b_n = 2^{n-1}$, 然后根据等比数列求和公式可得结果.

【详解】(1) $\{a_n\}$ 是“紧密数列”. 理由如下:

因为 $S_n = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$,

当 $n \geq 2$ 时, $S_{n-1} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$,

$$\text{所以 } a_n = S_n - S_{n-1} = \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right] - \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right] = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1},$$

当 $n=1$ 时, $a_1 = S_1 = \frac{1}{3}$, 满足上述关系式,

$$\text{所以 } a_n = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}, \text{ 则 } \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)^n}{\left(\frac{1}{3}\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}} = \frac{2}{3},$$

又 $\frac{1}{2} < \frac{2}{3} < 2$, 所以 $\{a_n\}$ 是紧密数列.

$$(2) \text{ 由 (1) 知, } b_n = c^n \cdot a_n = c^n \cdot \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = \frac{c}{3} \times \left(\frac{2c}{3}\right)^{n-1},$$

所以 $\{b_n\}$ 是以 $\frac{c}{3}$ 为首项, $\frac{2c}{3}$ 为公比的等比数列.

因为数列 $\{b_n\}$ 是“紧密数列”, 所以 $\frac{1}{2} \leq \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2c}{3} \leq 2$,

又因为 $4b_3 = 9b_2 - 2b_1$, 即 $4b_1 \cdot \left(\frac{2c}{3}\right)^2 = 9b_1 \cdot \frac{2c}{3} - 2b_1$, 整理得 $\left(\frac{2c}{3} - \frac{1}{4}\right)\left(\frac{2c}{3} - 2\right) = 0$,

解得 $\frac{2c}{3} = \frac{1}{4}$ (舍去) 或 $\frac{2c}{3} = 2$, 则 $\frac{c}{3} = 1$, $b_n = 2^{n-1}$,

$$\text{因此 } T_n = \frac{1 \times (1 - 2^n)}{1 - 2} = 2^n - 1,$$

故数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 T_n 为 $2^n - 1$.

2. 已知 $\{a_n\}$ 是无穷正整数数列, 定义操作 $D(k, s)$ 为删除数列 $\{a_n\}$ 中除以 k 余数为 s 的项,

剩下的项按原先后顺序不变得到新数列 $\{b_n\}$. 若 $a_n = 3^{n-1}$, $n \in \mathbf{N}^*$, 进行操作 $D(3, 1)$ 后剩余

项组成新数列 $\{b_n\}$, 设数列 $\{\log_3(a_n + b_n)\}$ 的前 n 项和为 S_n .

(1) 求 S_n ;

(2) 设数列 $\{c_n\}$ 满足 $c_n = \log_3 b_{2n-1}$, 求数列 $\left\{\frac{1}{c_n c_{n+1}}\right\}$ 的前 20 项和.

【答案】(1) $S_n = 2n \log_3 2 + \frac{n(n-1)}{2}$

(2) $\frac{20}{41}$

【分析】(1) 根据定义可确定 b_n ，进而得到 $\{\log_3(a_n + b_n)\}$ 的通项公式，结合等差数列求和公式可求得结果；

(2) 由 (1) 可得 c_n ，采用裂项相消法可求得结果.

【详解】(1) 当 $n \geq 2$ 时， $\frac{a_n}{3} = 3^{n-2}$ ，即 a_n 能被 3 整除；当 $n = 1$ 时， $\frac{a_1}{3}$ 的余数为 1；

由题意可知： $b_n = 3^n$ ， $\therefore \log_3(a_n + b_n) = \log_3(3^{n-1} + 3^n) = \log_3(4 \times 3^{n-1}) = 2 \log_3 2 + n - 1$ ，

$$\therefore S_n = 2n \log_3 2 + (0 + 1 + 2 + \cdots + n - 1) = 2n \log_3 2 + \frac{n(n-1)}{2}.$$

$$(2) \text{ 由 (1) 知: } c_n = \log_3 3^{2n-1} = 2n - 1, \therefore \frac{1}{c_n c_{n+1}} = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right),$$

$$\therefore \left\{ \frac{1}{c_n c_{n+1}} \right\} \text{ 的前 20 项和为 } \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{37} - \frac{1}{39} + \frac{1}{39} - \frac{1}{41} \right) = \frac{1}{2} \times \left(1 - \frac{1}{41} \right) = \frac{20}{41}.$$

3. 若数列 $\left\{ \frac{1}{a_n} \right\}$ 是等差数列，则称数列 $\{a_n\}$ 为调和数列. 若实数 a 、 b 、 c 依次成调和数列，则

称 b 是 a 和 c 的调和中项.

(1) 求 $\frac{1}{3}$ 和 1 的调和中项；

(2) 已知调和数列 $\{a_n\}$ ， $a_1 = 6$ ， $a_4 = 2$ ，求 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【答案】(1) $\frac{1}{2}$

(2) $a_n = \frac{18}{2n+1}$

【分析】(1) 根据题意得到 3 、 $\frac{1}{b}$ 、 1 成等差数列，从而得到方程，求出 $b = \frac{1}{2}$ ，得到答案；

(2) 根据题意得到 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是等差数列，设出公差，由通项公式基本量计算得到公差，从而求出 $\frac{1}{a_n} = \frac{2n+1}{18}$ ，得到 $\{a_n\}$ 的通项公式.

【详解】(1) 设 $\frac{1}{3}$ 和 1 的调和中项为 b ，依题意得： 3 、 $\frac{1}{b}$ 、 1 成等差数列，

所以 $\frac{1}{b} = \frac{3+1}{2} = 2$ ，解得： $b = \frac{1}{2}$ ，

故 $\frac{1}{3}$ 和 1 的调和中项为 $\frac{1}{2}$ ；

(2) 依题意， $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是等差数列，设其公差为 d ，

则 $3d = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} \Rightarrow d = \frac{1}{9}$ ，

所以 $\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} + (n-1)d = \frac{1}{6} + \frac{1}{9}(n-1) = \frac{2n+1}{18}$ ，

故 $a_n = \frac{18}{2n+1}$.

4. 设数列 $\{a_n\}$ 中，若 $a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ ($n \in N^*$)，则称数列 $\{a_n\}$ 为“凸数列”.

(1) 设数列 $\{a_n\}$ 为“凸数列”，若 $a_1 = 1$ ， $a_2 = -2$ ，试写出该数列的前 6 项，并求出该 6 项之和；

(2) 在“凸数列”中, 求证 $a_{n+6} = a_n$, $n \in N^*$.

【答案】(1) $a_1 = 1$, $a_2 = -2$, $a_3 = -3$, $a_4 = -1$, $a_5 = 2$, $a_6 = 3$, $S_6 = 0$; (2) 证明见解析.

【解析】(1) 由数列的递推公式, 运算即可得解;

(2) 由“凸数列”的性质可得 $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + a_{n+2} \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_{n+3} \end{cases}$, 两式相加化简可得 $a_{n+3} = -a_n$, 即可得解.

【详解】(1) 因为 $a_{n+1} = a_n + a_{n+2}$ ($n \in N^*$), 且 $a_1 = 1$, $a_2 = -2$,

所以 $a_1 = 1$, $a_2 = -2$, $a_3 = -3$, $a_4 = -1$, $a_5 = 2$, $a_6 = 3$, $S_6 = 0$;

(2) 证明: 由题意, $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + a_{n+2} \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_{n+3} \end{cases}$,

$\therefore a_{n+1} + a_{n+2} = a_n + a_{n+2} + a_{n+1} + a_{n+3}$, 即 $a_n + a_{n+3} = 0$, $\therefore a_{n+3} = -a_n$,

$\therefore a_{n+6} = -a_{n+3} = a_n$, $n \in N^*$.

5. 对于数列 $\{a_n\}$, 把 a_1 作为新数列 $\{b_n\}$ 的第一项, 把 a_i 或 $-a_i$ ($i = 2, 3, 4, \dots, n$) 作为新数列 $\{b_n\}$

的第 i 项, 数列 $\{b_n\}$ 称为数列 $\{a_n\}$ 的一个生成数列. 例如, 数列 $1, 2, 3, 4, 5$ 的一个生成数列是

$1, -2, -3, 4, 5$. 已知数列 $\{b_n\}$ 为数列 $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ ($n \in N^*$) 的生成数列, S_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和.

(1) 写出 S_3 的所有可能值;

(2) 若生成数列 $\{b_n\}$ 满足 $S_{3n} = \frac{1}{7} \left(1 - \frac{1}{8^n}\right)$, 求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式.

【答案】(1) $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}$;

$$(2) b_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n}, n = 3k - 2 \\ -\frac{1}{2^n}, n \neq 3k - 2 \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

【分析】(1) 根据题中定义, 结合分类讨论进行求解即可;

(2) 根据题中定义, 结合前 n 项和公式进行求解即可.

【详解】(1) 由已知, $b_1 = \frac{1}{2}, |b_n| = \frac{1}{2^n} (n \in \mathbb{N}^*, n \geq 2), \therefore b_2 = \pm \frac{1}{4}, b_3 = \pm \frac{1}{8}$, 由于 $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{7}{8}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8}, \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}, \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}, \therefore S_3$ 可能值为 $\frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}$.

(2) $\because S_{3n} = \frac{1}{7} \left(1 - \frac{1}{8^n} \right)$, 当 $n=1$ 时, $a_1 + a_2 + a_3 = S_3 = \frac{1}{7} \left(1 - \frac{1}{8} \right) = \frac{1}{8}$. 当 $n \geq 2$ 时,

$$a_{3n-2} + a_{3n-1} + a_{3n} = S_{3n} - S_{3n-3} = \frac{1}{7} \left(1 - \frac{1}{8^n} \right) - \frac{1}{7} \left(1 - \frac{1}{8^{n-1}} \right) = \frac{1}{8^n},$$

$\therefore a_{3n-2} + a_{3n-1} + a_{3n} = \frac{1}{8^n}, n \in \mathbb{N}^*, \therefore \{b_n\}$ 是 $\left\{ \frac{1}{2^n} \right\} (n \in \mathbb{N}^*)$ 的生成数列,

$$\therefore b_{3n-2} = \pm \frac{1}{2^{3n-2}}; b_{3n-1} = \pm \frac{1}{2^{3n-1}}; b_{3n} = \pm \frac{1}{2^{3n}}, \therefore b_{3n-2} + b_{3n-1} + b_{3n}$$

$$= \pm \frac{1}{2^{3n-2}} \pm \frac{1}{2^{3n-1}} \pm \frac{1}{2^{3n}} = \frac{1}{8^n} (\pm 4 \pm 2 \pm 1) = \frac{1}{8^n} (n \in \mathbb{N}^*), \text{在以上各种组合中, 当且仅当}$$

$$b_{3n-2} = \frac{4}{8^n}, b_{3n-1} = -\frac{2}{8^n}, b_{3n} = -\frac{1}{8^n} (n \in \mathbb{N}^*) \text{时才成立.}$$

$$\text{所以 } b_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n}, n = 3k - 2 \\ -\frac{1}{2^n}, n \neq 3k - 2 \end{cases} \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

6. 已知集合 $\{x \in \mathbf{Z} \mid a_n < x < b_n, n \in \mathbf{N}^*\}$ 中元素的个数为 c_n .

(1) 若 $a_n = -n$, $b_n = 3^n$, 求 c_2 .

(2) 若 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 均为等差数列且 $a_n < b_n$, $a_n, b_n \in \mathbf{Z}$, 证明: $\{c_n\}$ 也为等差数列.

(3) 若 $a_n = 2^n - \frac{2}{n}$, $b_{n+1} = 2b_n + 2$, 且 $b_1 = 10$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 S_n .

【答案】(1) $c_2 = 10$;

(2) 证明见解析;

(3) $S_n = 5 \cdot 2^{n+1} - 2n - 9$.

【分析】(1) 根据数列的新定义列举即可求得;

(2) 根据数列的新定义, 结合等差数列的定义即可证明;

(3) 先根据数列递推式构造等比数列 $\{b_n + 2\}$, 求出 b_n , 再由数列的新定义推出 $\{c_n\}$ 的通项公式, 再进行分组求和, 借助于等比数列求和公式即得.

【详解】(1) 若 $a_n = -n$, $b_n = 3^n$, 则 $a_2 = -2$, $b_2 = 9$,

则满足 $-2 < x < 9$ 的整数为 $-1, 0, 1, \dots, 8$, 共有 10 个, 故 $c_2 = 10$;

(2) 因为 $a_n, b_n \in \mathbf{Z}$, 所以 $c_n = b_n - a_n - 1$,

所以 $c_{n+1} - c_n = (b_{n+1} - a_{n+1} - 1) - (b_n - a_n - 1) = (b_{n+1} - b_n) - (a_{n+1} - a_n)$.

因为 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 均为等差数列, 所以可设 $a_{n+1} - a_n = d_1$, $b_{n+1} - b_n = d_2$,

则 $(b_{n+1} - b_n) - (a_{n+1} - a_n) = d_2 - d_1$ 为常数,

故 $\{c_n\}$ 是以 $b_1 - a_1 - 1$ 为首项, $d_2 - d_1$ 为公差的等差数列.

(3) 由 $b_{n+1} = 2b_n + 2$, 得 $b_{n+1} + 2 = 2b_n + 4$, 即 $b_{n+1} + 2 = 2(b_n + 2)$,

则数列 $\{b_n + 2\}$ 是 $b_1 + 2 = 12$ 为首项, 公比为 2 的等比数列,

则 $b_n + 2 = 12 \cdot 2^{n-1}$, 则 $b_n = 3 \cdot 2^{n+1} - 2 > a_n$.

当 $n=1$ 时, $a_1 = 0$, $b_1 = 10$, $c_1 = 10 - 0 - 1 = 9$.

当 $n=2$ 时, $a_2 = 3$, $b_2 = 22$, $c_2 = 22 - 3 - 1 = 18$.

当 $n \geq 3$ 时, $a_n = 2^n - \frac{2}{n}$, 因 $0 < \frac{2}{n} < 1$, 所以 $2^n - 1 < a_n < 2^n$, 故大于 a_n 的最小整数为 2^n ,

又 b_n 为整数, 则 $c_n = (b_n - 1) - 2^n + 1 = b_n - 2^n = (3 \cdot 2^{n+1} - 2) - 2^n = 5 \cdot 2^n - 2$.

当 $n=2$ 时, $5 \times 2^2 - 2 = 18 = c_2$ 符合上式; 当 $n=1$ 时, $5 \times 2^1 - 2 = 8 \neq 9$,

$$\text{故 } c_n = \begin{cases} 9, n=1, \\ 5 \cdot 2^n - 2, n \geq 2. \end{cases}$$

当 $n \geq 2$ 时, $S_n = 9 + 5 \times (2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n) - 2(n-1)$

$$= 9 + 5 \times \frac{2^2 \times (1 - 2^{n-1})}{1 - 2} - 2(n-1) = 5 \cdot 2^{n+1} - 2n - 9,$$

又 $5 \times 2^{1+1} - 2 - 9 = 9 = S_1$, 所以 $S_n = 5 \cdot 2^{n+1} - 2n - 9$.

【点睛】本题考查数列的新定义与数列的综合, 考查数学抽象、逻辑推理及数学运算的核心素养.

7. 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{a_n} = k$ (k 为常数), 则称数列 $\{a_n\}$ 为等比和数列, k 为公比和,

已知数列 $\{a_n\}$ 是以 5 为公比和的等比和数列, 且 $a_1 = 3, a_2 = 6$, 记 $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

(1) 求证: 数列 $\{b_n\}$ 是周期数列, 并指出其周期;

(2) 求 $\frac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}}$ 的值.

【答案】(1)证明见解析，周期为 2

(2)6

【分析】(1) 根据题干所给条件可得 $b_{n+1} + b_n = 5$ ，再据此推出 b_{n+1}, b_{n-1} 的关系即可；

(2) 根据 $\frac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}} = \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} \cdot \frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} = b_{2n} \cdot b_{2n-1}$ ，可直接求解。

【详解】(1) 由 $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}} + \frac{a_{n+1}}{a_n} = k$ 及 $b_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ 可得 $b_{n+1} + b_n = 5$ ，

由此可得递推关系 $b_{n+1} = 5 - b_n$ ，所以 $b_{n+1} = 5 - b_n = 5 - (5 - b_{n-1}) = b_{n-1}$ ，

可得 $b_{n+2} = b_n$ ，即数列 $\{b_n\}$ 是周期数列，周期为 2。

(2) $b_1 = \frac{a_2}{a_1} = 2$ ， $b_2 = 5 - b_1 = 3$ ，

由 (1) 知， $\{b_n\}$ 周期为 2，所以 $b_{2n-1} = 2, b_{2n} = 3$ ，

所以 $\frac{a_{2n+1}}{a_{2n-1}} = \frac{a_{2n+1}}{a_{2n}} \cdot \frac{a_{2n}}{a_{2n-1}} = b_{2n} \cdot b_{2n-1} = 6$ 。

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，若数列 $\{a_n\}$ 满足 $S_n \cdot S_{n+2} < S_{n+1}^2$ ，则称数列 $\{a_n\}$ 是“方特数列”。

(1)证明：数列 $\{n\}$ 是“方特数列”；

(2)若数列 $\{a_1 q^{n-1}\} (a_1 \neq 0)$ 是“方特数列”，求 q 的取值范围；

(3)证明：当 $q > 0$ 时，数列 $\{nq^{n-1}\}$ 是“方特数列”。

【答案】(1)证明见解析

(2) $(0, +\infty)$

(3)证明见解析

【分析】(1) 求出 S_n 利用“方特数列”的定义即可证明；

(2) 分类讨论当 $q=1$ 和 $q \neq 1$ 时，数列 $\{a_1 q^{n-1}\} (a_1 \neq 0)$ 的前 n 项和为 S_n ，“方特数列”的定义列出不等式即可求解；

(3) 当 $q=1$ 时，由 (1) 知满足条件，当 $q > 0$ 且 $q \neq 1$ 时，利用错位相减法求出数列 $\{nq^{n-1}\}$ 的前 n 项和为 S_n ，利用“方特数列”的定义结合导数即可证明.

【详解】(1) 当 $a_n = n$ 时， $S_n = \frac{1}{2}n(n+1)$ ，

$$S_n \cdot S_{n+2} - S_{n+1}^2 = \frac{1}{4}(n+1)(n+2)[n(n+3) - (n+1)(n+2)] = -\frac{1}{2}(n+1)(n+2) < 0,$$

$\therefore$ 数列 $\{a_n\}$ 满足 $S_n \cdot S_{n+2} < S_{n+1}^2$ ，即数列 $\{n\}$ 是“方特数列”.

(2) 当 $q=1$ 时， $S_n = na_1$ ，

$$S_n \cdot S_{n+2} - S_{n+1}^2 = na_1 \cdot (n+2)a_1 - (n+1)^2 a_1^2 = -a_1^2 < 0，\text{ 满足条件；}$$

$$\text{当 } q \neq 1 \text{ 时， } S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q},$$

$\therefore$ 数列 $\{a_1 q^{n-1}\}$ 是“方特数列”，

$$\therefore S_n \cdot S_{n+2} - S_{n+1}^2 = \frac{a_1^2}{(1-q)^2} [(1-q^n)(1-q^{n+2}) - (1-q^{n+1})^2] = -a_1^2 q^n < 0, .$$

$\therefore q^n > 0$ ， $\therefore q > 0$ 且 $q \neq 1$ ，

综上所述，当数列 $\{a_1 q^{n-1}\} (a_1 \neq 0)$ 是“方特数列”时， q 的取值范围为 $(0, +\infty)$ 。

(3) 当 $q=1$ 时，由 (1) 知满足条件，

$$\text{当 } q > 0 \text{ 且 } q \neq 1 \text{ 时， } a_n = nq^{n-1}, S_n = 1 + 2q + 3q^2 + \dots + nq^{n-1},$$

$$qS_n = q + 2q^2 + 3q^3 + \dots + nq^n,$$

$$\therefore (1-q)S_n = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} - nq^n = \frac{(1-q^n) - nq^n(1-q)}{1-q},$$

$$\therefore S_n = \frac{(1-q^n) - nq^n(1-q)}{(1-q)^2},$$

$$S_n \cdot S_{n+2} - S_{n+1}^2 =$$

$$\begin{aligned} & \frac{\left[(1-q^n) - nq^n(1-q) \right] \left[(1-q^{n+2}) - (n+2)q^{n+2}(1-q) \right] - \left[(1-q^{n+1}) - (n+1)q^{n+1}(1-q) \right]^2}{(1-q)^4} \\ &= -\frac{q^n \left[q^{n+2} - (n+2)q + n+1 \right]}{(1-q)^2}, \end{aligned}$$

$$\text{设 } g(q) = q^{n+2} - (n+2)q + n+1, \therefore g'(q) = (n+2)(q^{n+1} - 1),$$

当 $q > 1$ 时， $g'(q) > 0$ ， $g(q)$ 单调递增；当 $0 < q < 1$ 时， $g'(q) < 0$ ， $g(q)$ 单调递减， $\therefore$

$$g(q) > g(1) = 0,$$

$$\therefore S_n \cdot S_{n+2} - S_{n+1}^2 < 0,$$

综上所述，当 $q > 0$ 时，数列 $\{nq^{n-1}\}$ 是“方特数列”。

9. 已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且满足 $S_n = \frac{n^2 + n}{2}$ ，数列 $\{b_n\}$ 为公比大于 0 的等比数列，

$$\text{且 } b_2 = a_3, b_4 = a_{27}.$$

(1) 求 a_n, b_n ；

(2) 若在 a_n 与 a_{n+1} 之间插入 b_n 个 1，由此构成一个新的数列 $\{c_n\}$ ，记 $\{c_n\}$ 的前 n 项和 T_n ，求 T_{45} 的值。

【答案】(1) $a_n = n$, $b_n = 3^{n-1}$

(2) 55

【分析】(1) 根据 S_n 与 a_n 的关系求得 a_n 的通项公式，然后再利用等比数列通项公式基本量运算求得 b_n 的通项公式；

(2) 依次求出 $\{a_n\}$ 中相邻项之间插入 1 的个数，即可求出 T_{45} 的值.

【详解】(1) 由题意，得 $a_n = S_n - S_{n-1} = \frac{n^2 + n}{2} - \frac{(n-1)^2 + (n-1)}{2} = n (n \geq 2)$,

又 $n=1$ 时， $a_1 = S_1 = 1$ ，符合题意，所以 $a_n = n$.

设数列 $\{b_n\}$ 的公比为 $q (q > 0)$ ，又 $b_2 = a_3 = 3$ ， $b_4 = a_{27} = 27$ ，

即 $\begin{cases} b_2 = b_1 q = 3 \\ b_4 = b_1 q^3 = 27 \end{cases}$ ，解得 $b_1 = 1, q = 3$ ，所以 $b_n = 3^{n-1}$.

(2) 根据题意，在 a_n 与 a_{n+1} 之间插入 b_n 个 1，

即在 1 和 2 之间插入 $b_1 = 1$ 个 1；

在 2 和 3 之间插入 $b_2 = 3$ 个 1；

在 3 和 4 之间插入 $b_3 = 9$ 个 1；

在 4 和 5 之间插入 $b_4 = 27$ 个 1，

此时刚好有 45 项，则 $T_{45} = (1+3+9+27) + (1+2+3+4+5) = 55$.

所以 T_{45} 的值为 55.

10. 若数列 $\{a_n\}$ 满足：当 n 为奇数时， $a_n + a_{n+1} = a_{n+2}$ ；当 n 为偶数时， $a_n a_{n+1} = a_{n+2}$. 则称数列 $\{a_n\}$ 为和积交替数列.

(1) 若数列 $1, a, b, 6$ 为和积交替数列，分别求实数 a, b 的值；

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 为和积交替数列，且 $a_1 = 2$ ， $a_2 = t \left(t > \frac{1}{2} \right)$.

(i) 若 3 是数列 $\{a_n\}$ 中的项，求实数 t 的值；

(ii) 若 $a_2 = 2$ ，证明： $a_{2n} \geq 2^{2^{n-1}}$.

【答案】 (1) $\begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} a=-3 \\ b=-2 \end{cases}$

(2) (i) $t=3$ 或 $t=1$ ；(ii) 证明见解析

【分析】 (1) 根据和积交替数列的定义，列出参数的方程组，求出参数的值.

(2) (i) 根据和积交替数列的定义，由 a_1, a_2 递推出后面的项，由 a_2 范围，求出后面项的大小范围，判断 3 可能出现的位置，求出参数的值.

(ii) 根据和积交替数列的定义，由 $a_1 = a_2 = 2$ 递推出后面的项满足的条件，根据数列的递推公式，结合累乘法，通过对数运算，证明命题.

【详解】 (1) 由题知 $1+a=b$ ， $ab=6$ ，

解得 $\begin{cases} a=2 \\ b=3 \end{cases}$ ，或 $\begin{cases} a=-3 \\ b=-2 \end{cases}$ ；

(2) (i) 由题知 $a_2 = t \left(t > \frac{1}{2} \right)$, 则 $a_3 = a_1 + a_2 = 2 + t$, $a_4 = a_2 a_3 = (2 + t)t$,

由 $t > \frac{1}{2}$, 则 $a_4 > \frac{5}{4} > 1$; $a_5 = a_3 + a_4 = (2 + t) + (2 + t)t = t^2 + 3t + 2$,

由 $t > \frac{1}{2}$, 则 $a_5 = t^2 + 3t + 2 = \left(t + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} > \frac{15}{4} > 3$; $a_6 = a_4 a_5$, 但 $a_4 > 1$, $a_5 > 3$,

所以 $a_6 = a_4 a_5 > 3$; 而 $a_7 = a_5 + a_6 > 6$, ...

以此类推, 当 $n \geq 5$, $n \in \mathbf{N}^*$ 时, $a_n > 3$.

所以若 3 是数列 $\{a_n\}$ 中的项,

则 $a_2 = 3$ 或 $a_3 = 3$ 或 $a_4 = 3$, 解得 $t = 3$ 或 $t = 1$.

(ii) 易知数列中的项均为正整数, 由题知 $a_{2n} = a_{2n-2} \times a_{2n-1} (n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*)$, 且

$$a_{2n-1} = a_{2n-2} + a_{2n-3} (n \geq 2, n \in \mathbf{N}^*),$$

所以 $a_{2n} = a_{2n-2} \times (a_{2n-2} + a_{2n-3}) > a_{2n-2}^2$, 同取以 2 为底的对数, 得 $\log_2 a_{2n} > \log_2 a_{2n-2}^2$,

即 $\log_2 a_{2n} > 2 \log_2 a_{2n-2}$. 又 $a_n > 1$, 所以 $\frac{\log_2 a_{2n}}{\log_2 a_{2n-2}} > 2$,

则 $\frac{\log_2 a_{2n}}{\log_2 a_{2n-2}} > 2, \frac{\log_2 a_{2n-2}}{\log_2 a_{2n-4}} > 2, \dots, \frac{\log_2 a_4}{\log_2 a_2} > 2$,

累乘整理, 得 $\log_2 a_{2n} > 2^{n-1} \log_2 a_2 = 2^{n-1}$,

所以 $n \geq 2$ 时, $a_{2n} > 2^{2^{n-1}}$.

当 $n = 1$ 时, $a_2 = 2$ 符合上述不等式,

所以 $a_{2n} \geq 2^{2^{n-1}}$, 结论得证.

11. 设等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 且 $a_2 = 8$, $S_4 = 40$, 数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和为 T_n , 且

$$T_n - 2b_n + 3 = 0 \quad (n \in \mathbf{N}^*).$$

(1) 求数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 的通项公式;

(2) 设 $c_n = \begin{cases} a_n, n \text{ 为奇数} \\ \frac{b_n}{(b_n + 1)(b_{n+2} + 1)}, n \text{ 为偶数} \end{cases}$, 求数列 $\{c_n\}$ 的前 $2n + 1$ 项和 P_{2n+1} .

(3) 若从数列 $\{a_n\}$ 列中依次取出第 b_1 项, 第 b_2 项, 第 b_3 项,, 第 b_n 项, 并按原来的

先后顺序组成一个新的数列 $\{d_n\}$, 求数列 $\{d_n\}$ 的通项公式与前 n 项和 Q_n .

【答案】(1) $a_n=4n$; $b_n=3 \cdot 2^{n-1}$

$$(2) P_{2n+1} = 4(n+1)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{3 \cdot 2^{2n+1} + 1} \right)$$

$$(3) d_n = 3 \cdot 2^{n+1}; Q_n = 3 \cdot 2^{n+2} - 12$$

【分析】(1) 由等差数列的通项公式和前 n 项和公式，可求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；对于数列 $\{b_n\}$ ，当时 $n \geq 2$ ， $b_n = T_n - T_{n-1}$ ，先求出递推公式，从而得到 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(2) 利用分组求和的方法可求数列的前 n 项和；

(3) $\{b_n\}$ 的通项恰好是 $\{a_n\}$ 的项数，代入公式即可得到 $\{d_n\}$ 的通项公式.

【详解】(1) 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ，由题意得：

$$\begin{cases} a_1 + d = 8 \\ 4a_1 + 6d = 40 \end{cases}, \text{ 解得 } \begin{cases} a_1 = 4 \\ d = 4 \end{cases}, \text{ 所以 } a_n = 4n \quad (n \in \mathbf{N}^*),$$

对于数列 $\{b_n\}$ ，由已知，当 $n=1$ 时， $b_1 - 2b_1 + 3 = 0$ ，得 $b_1 = 3$ ，

当 $n \geq 2$ 时， $T_n - 2b_n + 3 = 0$ ， $T_{n-1} - 2b_{n-1} + 3 = 0$ ，

两式相减，得 $b_n = 2b_{n-1}$ ，($n \geq 2$)，所以数列 $\{b_n\}$ 为等比数列，

得 $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$ ($n \in \mathbf{N}^*$) .

$$(2) P_{2n+1} = (a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n+1}) + (b_2 + b_4 + \cdots + b_{2n})$$

$$\begin{aligned}
&= 4(1+3+5+\cdots+2n+1) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3 \cdot 2^1 + 1} - \frac{1}{3 \cdot 2^3 + 1} + \frac{1}{3 \cdot 2^3 + 1} - \frac{1}{3 \cdot 2^5 + 1} + \cdots + \frac{1}{3 \cdot 2^{2n-1} + 1} - \frac{1}{3 \cdot 2^{2n+1} + 1} \right) \\
&= \frac{4(1+2n+1)(n+1)}{2} + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{3 \cdot 2^{2n+1} + 1} \right) \\
&= 4(n+1)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{3 \cdot 2^{2n+1} + 1} \right).
\end{aligned}$$

(3) 由于 $b_n = 3 \cdot 2^{n-1}$, $d_n = a_{b_n} = 4(3 \cdot 2^{n-1}) = 3 \cdot 2^{n+1}$ ($n \in \mathbf{N}^*$),

所以数列 $\{d_n\}$ 是一个以 12 为首项, 2 为公比的等比数列,

可得: $Q_n = \frac{12(1-2^n)}{1-2} = 3 \cdot 2^{n+2} - 12$ ($n \in \mathbf{N}^*$).

12. 已知项数为 m ($m \in \mathbf{N}^*, m \geq 2$) 的数列 $\{a_n\}$ 满足如下条件: ① $a_n \in \mathbf{N}^*$ ($n = 1, 2, \dots, m$); ②

$a_1 < a_2 < \cdots < a_m$. 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n = \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_m) - a_n}{m-1} \in \mathbf{N}^*$, 其中 $n = 1, 2, \dots, m$, 则称 $\{b_n\}$

为 $\{a_n\}$ 的“心灵契合数列”.

(I) 数列 1, 5, 9, 11, 15 是否存在“心灵契合数列”若存在, 写出其心灵契合数列, 若不存在请说明理由;

(II) 若 $\{b_n\}$ 为 $\{a_n\}$ 的“心灵契合数列”, 判断数列 $\{b_n\}$ 的单调性, 并予以证明;

(III) 已知数列 $\{a_n\}$ 存在“心灵契合数列” $\{b_n\}$, 且 $a_1 = 1$, $a_m = 1025$, 求 m 的最大值.

【答案】(I) 不存在, 理由见解析; (II) 单调递减, 证明见解析; (III) 33

【解析】(I) 求出 b_1 、 b_2 、 b_3 、 b_4 后, 根据“心灵契合数列”的定义判定即可;

(II) 由“心灵契合数列”的定义, 结合数列单调性讨论 $b_{n+1}-b_n$ 的符号即可得解;

(III) 根据数列 $\{a_n\}$ 及其“心灵契合数列” $\{b_n\}$ 中项的特征, 结合单调性分析出 $(m-1)^2 \leq 1024$, 即可得解.

【详解】(I) 数列 1, 5, 9, 11, 15 不存在“心灵契合数列”

因为 $1+5+9+11+15=41$,

$$b_1 = \frac{41-1}{5-1} = 10 \in \mathbf{N}^*, \quad b_2 = \frac{41-5}{5-1} = 9 \in \mathbf{N}^*,$$

$$b_3 = \frac{41-9}{5-1} = 8 \in \mathbf{N}^*, \quad b_4 = \frac{41-11}{5-1} = \frac{15}{2} \notin \mathbf{N}^*,$$

所以数列 1, 5, 9, 11, 15 不存在“心灵契合数列”

(II) 数列 $\{b_n\}$ 为单调递减数列.

$$\text{因为 } b_{n+1}-b_n = \frac{a_n-a_{n+1}}{m-1}, \quad 1 \leq n \leq m-1, \quad n \in \mathbf{N}^*,$$

又因为 $a_1 < a_2 < \cdots < a_m$, 所以有 $a_n - a_{n+1} < 0$,

$$\text{所以 } b_{n+1}-b_n = \frac{a_n-a_{n+1}}{m-1} < 0,$$

即 $b_1 > b_2 > \cdots > b_m$ 成立

所以数列 $\{b_n\}$ 为单调递减数列.

$$(III) \quad \forall 1 \leq i < j \leq m, \quad \text{都有 } b_i - b_j = \frac{a_j - a_i}{m-1},$$

因为 $b_i \in \mathbf{N}^*$, $b_1 > b_2 > \cdots > b_m$.

所以 $b_i - b_j \in \mathbf{N}^*$,

$$\text{所以 } b_i - b_j = \frac{a_j - a_i}{m-1} \in \mathbf{N}^*,$$

$$\text{所以 } b_1 - b_m = \frac{a_m - a_1}{m-1} = \frac{1024}{m-1} \in \mathbf{N}^*$$

$$\text{因为 } b_{n-1} - b_n = \frac{a_n - a_{n-1}}{m-1} \in \mathbf{N}^*,$$

所以 $a_n - a_{n-1} \geq m-1$,

$$\text{又 } a_m - a_1 = (a_m - a_{m-1}) + (a_{m-1} - a_{m-2}) + \cdots + (a_2 - a_1)$$

$$\geq (m-1) + (m-1) + \cdots + (m-1) = (m-1)^2,$$

则 $(m-1)^2 \leq 1024$ ，即 $m \leq 33$ ， $\frac{1024}{m-1} \in \mathbf{N}^*$ ，所以 $m \leq 33$ 。

例如： $a_n = 32n - 31 (1 \leq n \leq 33)$ ，

$$\text{此时， } b_n = \frac{\frac{33}{2}(a_1 + a_{33}) - a_n}{32} = -n + 530 \in \mathbf{N}^*,$$

且 $\{b_m\}$ 为单调递减数列，故满足题意。

所以 m 的最大值是 33。

【点睛】 本题考查了数列新定义的相关问题，关键是对于概念的理解，建立适当的等量关系或不等关系，属于中档题。